**שקף 58 שאלה 1**

הטענה נכונה.

מוכיחים בשלילה.

נעזרים בקשת(בוחן) שקודקודיה הם a ו- b.

תחילה מניחים שדרגת כל קודקוד היא 2 בדיוק(בעבור מקרה שדרגת כל קודקוד גבוהה יותר ובעבור כל הקומבינציות של דרגות גבוהות או שוות ל-2 קל להראות בעזרת קשת הבוחן).

ההנחה בשלילה, מניחה שיש קשת מפרידה והיא קשת הבוחן שלנו.

כעט נקבל שני רכיבי קשירות(לפי הגדרה של מהי קשת מפרידה) במקרה שתחילה מתעסקים בו אם נסתכל על קודקוד a כעט תצא ממנו בהכרח קשת אחת(כי את הקשת המפרידה שנתנה לו דרגה 2 מחקנו!)לקודקוד כלשהו ברכיב שלו(אחד משני הרכיבים שנוצרו כתוצאה ממחיקת הקשת המפרידה) אך דרגתו היא 2 ולכן נוכל לצאת ממנו בקשת אחרת מזו שנכנסנו אליו וכך הלאה,בשלב מסויים נגיע לקודקוד שדרגתו 2 והקשת היוצאת ממנו יכולה לצאת לקודקוד הנמצא ברכיב השני בלבד! מה שסותר את ההנחה שמצאנו מלכתחילה קשת מפרידה.

(ניתן להשתמש בהוכחות במצגת של מעגל/מסלול אויילר...)

**שקף שאלה 2**

את השאלה הנ"ל נוכיח בשלילה בעזרת משפטים ו/או תכונות שנלמדו בפרק.

ניקח קשת כלשהי בגרף הפשוט והקשיר ונניח שהיא קשת מפרידה(כלומר ההנחה בשלילה היא שישנה לפחות קשת אחת כזאת) נניח שזאת הקשת (a,b) מאחר והיא קשת מפרידה אם נבטלה קודקודיה חייבים להימצא כל אחד ברכיב קשירות משלו, ודרגת כל אחד מהם היא כעט היא 1(בהתחלה היה 2).

נסתכל נניח על קודקוד b ורכיב הקשירות שבו הוא נמצא:

נצא מ-b ע"י הקשת היחידה שנוגעת בו כעט, לכל קודקוד שנגיע נוכל לצאת ממנו בקשת אחרת מזו שהגענו אליו מאחר ופרט ל-b דרגת כל קודקוד ברכיב הקשיר היא זוגית! ולכן, בוודאות יהיה קודקוד כזה שאם ניכנס אליו נהיה חייבים לצאת ממנו בקשת שתוביל לרכיב הקשירות שבו נמצא a וזאת מאחר והגרף פשוט ודרגת כל קודקוד פרט ל-b היא זוגית ולכן לא נוכל באף שלב לחזור ל-b בקשת אחרת מזו שיצאנו ממנה ב-b !

זאת סתירה להנחה שהקשת שביטלנו הייתה מפרידה.

\*נכליל נימוק זה בעבור שאלה 1.

(בעזרת ההוכחה במצגת של מעגל/מסלול אויילר ניתן לטעון שקיים מעגל בגרף עם דרגות שכאלו ולכן לא תהיה קשת מפרידה שכן כזו לא יכולה להימצא על מעגל כלשהו בגרף! )

**שקף 58 שאלה 3**

(10,11) , (a,b) , (5,7)

**שקף 59 שאלה 4**

נרצה בהתאם לנדרש בשאלה למצוא עץ פורש מינימלי שבו יהיו כמה שיותר קשתות שחורות או כמה שיותר קשתות לבנות.

הניסוח הנ"ל זהה לתכונה שראינו והדבר שקול למציאת עץ פורש מינימלי בעל מספר קשתות בעלות צבע מסויים מקסימלי(תכונה 6 שקף 55)

נפתור ע"י שתי דרכים שהוצגו קודם לכן בפרק.

דרך א:

נוסיף ε (שהוגדר כהפרש בין שני המשקלים המינימליים בגרף, H , חלקי מספר הקשתות בעץ הפורש, |V|-1) לקשתות בעלות צבע או שחור או לבן,

בגלל הערך המוחלט לא משנה איזה צבע נעדיף.

הרצת האלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי תבטיח שבכל פעם שיהיה שוויון תיבחר קשת שאותה העדפנו קודם לכן כלומר,

זאת שלא הוספנו לה ε ! הרי היא קטנה יותר במשקלה כעט.

(נשים לב שהוספת ε לקשתות מסויימות היא כאילו הגדרנו פונקציית משקל חדשה שהיא מונוטונית עולה ולכן לפי תכונות שראינו בפרק קודם לכן העץ החדש שהתקבל יהיה עץ נכון כלומר יהיה עץ פורש מינימלי מבחינת הקשתות המרכיבות אותו עם זאת

המשקל הכולל יהיה שונה בגלל הוספת ε.

במילים אחרות מבין כל העצים הפורשים המינימליים הקיימים פונקציית המשקל החדשה תמצא עץ פורש מינימלי בקבוצה זו כך שקבוצת הקשתות בעלות צבע מסויים גדולה יותר משאר העצים האפשריים )

העדפת צבע מסויים על פני האחר תגדיל את m1 או m2 בהתאם למי הוספנו ε, מה שייתן בסוף התהליך את הערך המקסימלי עבור בהתאמה:

-נריץ פעם עם העדפה לשחורים, נקבל את מספר הקשתות שהוכנסו בהרצה ונשים אותו במשתנה

M1

- נריץ פעם עם העדפה ללבנים, נקבל את מספר הקשתות שהוכנסו בהרצה ונשים אותו במשתנה

M2

בשתי ההרצות קיבלנו שני עצים פורשים מינימליים!

נבצע פעולה חיסור :

M1-M2

M2-M1

ניקח את התוצאה המקסימלית כלומר, התוצאות יסמלו את שני העצים הפורשים המינימליים שעבורם ההפרש בין מספר הקשתות הלבנות לשחורות הוא הגדול ביותר בתוספת מי עולה על מי...

דרך ב:

היא ע"י מיון משני באלגוריתם של קרוסקל.

למשל במיון של המשקלים בכל פעם שיהיו שתי קשתות(בזוגות) בעלות משקל זהה אך צבע שונה נשים את זאת בעלת הצבע הרצוי למיקסום מספר קשתותיו לפני כך שבהמשך האלגוריתם נבחן אותה לפני וכך ניתן לה יותר סיכוי להיכנס לעץ הפורש המינימלי.

סיבוכיות פרים או קרוסקל כפי שמופיע במצגת.

**שקף 59 שאלה 5**

הפתרון זהה לפתרון שאלה 4.

ההבדל היחיד נעוץ בפונקציית המשקל שנותנת כעט טווח משקלים סופי ושלם ולפיכך נוכל לשפר רק ע"י אלגוריתם פרים! .

\*הנתון של טווח המשקלים, כלומר שהטווח סופי ומכיל משקלים שלמים בלבד לא משפיע על תיכנון האלגוריתם אלא על אופן מימושו!

כלומר הנתון הזה כן משפיע על אילו מבני נתונים נבחר לצורך מימוש יעיל יותר שיתרום לסיבוכיות.

את המיון עבור טווח משקלים סופי ושלם ניתן לבצע ע"י מיון דלי או

Bucket sort .

ראה שאלה 7 באוסף שאלות באלגוריתמים.

**שקף 59 שאלה 6**

הבהרות:

אם יש מעגל אז לפחות קשת אחת ממעגל זה תהיה בקבוצה המבוקשת בשאלה.

הקבוצה שתכיל את כל הקשתות הנ"ל תהיה בעלת משקל מינימלי.

פתרון:

נבנה/נמצא ע"י אלגוריתם כלשהו עץ פורש מקסימלי .

(פשוט הקריטריון השתנה אם ממיינים ע"י קרוסקל אז יוצרים רשימת משקלים בסדר יורד, בפרים נבחר את ה- k[v] המקסימליים ,בחתך, הפעם ולא המינימליים)

כל הקשתות שלא נכנסו לקבוצת הקשתות של העץ הפורש המקסימלי סגרו מעגל! יתרה מכך בגלל שבנינו עץ פורש מקסימלי הרי שמשקל כל קשת שלא נכנסה, בהכרח היה מינימלי ביחס למשקלן של קשתות אחרות

**במעגל שלה**!! שכן הן נבחרו לפניה בהרצת האלגוריתם למציאת עץ פורש מקסימלי...

לכן קבוצה זו של קשתות נותרות(E-ET) מכילה לפחות קשת אחת מכל מעגל

(ה-"לפחות" הוא בגלל שעבור קשת מסויימת שסוגרת מעגל יכולה להיות באותו מעגל עוד קשת שטרם נבדקה והיא תהווה קשת סוגרת מעגל במעגל אחר ובמובן הזה עבור המעגל של הקשת הראשונה שנבדקת יכולות להיות בסוף התהליך יותר מקשת אחת השייכות אליו אך בכל זאת תהיה לפחות אחת!)

ומשקלה הכולל של הקבוצה הנ"ל מינימלי שכן כל הקשתות המקסימליות שלא סגרו מעגל נבחרו לקשתות העץ הפורש המקסימלי.

הסבר נוסף לזה שהקבוצה המתקבלת היא אכן מינימלית:

בהינתן גרף עם פונקציית משקל, אז בעבור כל קשת וקשת ידוע משקלה והוא קבוע.

1)E' = E-ET

2)w(ET)+w(E') = סכום קבוע ונתון

ב-1 סימנו את הקשתות הנותרות כלומר, קשתות הקבוצה המבוקשת השאלה.

ב-2 רשמנו שוויון שהוא נכון.

אגף ימין הוא נתון שמגיע עם פונקציית המשקל של הגרף(סכום המשקלים של כל קשתות הגרף) לעומת זאת באגף שמאל שני האיברים הם משתנים אבל,

האלגוריתם מוצא עץ פורש מקסימלי ע"י בחירת קשתות בעלות משקל מקסימלי כלומר הוא ממקסם את המשתנה: w(ET) אך בגלל אגף ימין שהוא קבוע חייב להתקיים שבזמן שהוא ממקסם את המשתנה הנ"ל הוא גם מקטין את המשתנה: w(E')

**שקף 60 שאלה 7**

דרך א:

נשים את הקשת e בקבוצת הקשתות של העץ הפורש המינימלי שלנו.

נריץ אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי על שאר הקשתות שנותרו.

נקבל קבוצת קשתות ET ונחשב את משקלה ונשים אותו במשתנה M1 .

כעט נריץ אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי כאשר קבוצת קשתות העץ ריקה. נקבל את משקל הקבוצה שהתקבלה בתום התהליך ונשים אותו במשתנה M2 .

אם:

M2<M1

אזי יש עץ פורש מינימלי שניתנה לו האפשרות לבחור את e אך היא לא נבחרה(נשים לב שאם הייתה שווה במשקלה לקשת אחרת וזאת נבחרה שרירותית אז היינו מקבלים שוויון!) ולכן e לא נמצאת בעץ פורש מינימלי.

אם:

M2=M1

אז e בוודאות נמצאת בעץ פורש מינימלי כלשהו אם זאת לא בטוח באיזה מאחר ויכול להיות לה משקל זהה לקשתות אחרות שנבחרות שרירותית במקומה אך בהינתן האפשרות לבחור אותה מול השאר(גם אם שרירותית) בגלל משקל זהה המשקל הכולל של עץ זה או אחר יהיו שווים!

דרך ב:

בדיקה בזמן ליניארי.

<http://stackoverflow.com/questions/15049864/check-if-edge-is-included-in-some-mst-in-linear-time-non-distinct-values>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree#Cycle_property>

We will solve this using [MST cycle property](http://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree#Cycle_property), which says that, "For any cycle C in the graph, if the weight of an edge e of C is larger than the weights of all other edges of C, then this edge cannot belong to an MST."

Now, run the following O(E+V) algorithm to test if the edge E connecting vertices u and v will be a part of some MST or not.

**Step 1**

Run dfs from one of the end-points(either u or v) of the edge E considering only those edges that have weight less than that of E.

**Step 2**

**Case 1** If at the end of this dfs, the vertices u and v get connected, then edge E cannot be a part of some MST. This is because in this case there definitely exists a cycle in the graph with the edge E having the maximum weight and it cannot be a part of the MST(from the cycle property).

**Case 2** But if at the end of the dfs u and v stay disconnected, then edge E must be the part of some MST as in this case E is not always the maximum weight edge of all the cycles that it is a part of.

--------------------------------------

Cycle property**[[edit](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Minimum_spanning_tree&action=edit&section=5" \o "Edit section: Cycle property)]**

*For any cycle* C *in the graph, if the weight of an edge* e *of* C *is larger than the individual weights of all other edges of* C*, then this edge cannot belong to a MST.*

Proof: [Assume the contrary](https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_by_contradiction), i.e. that *e* belongs to an MST T1. Then deleting *e* will break T1 into two subtrees with the two ends of *e* in different subtrees. The remainder of *C* reconnects the subtrees, hence there is an edge *f* of *C* with ends in different subtrees, i.e., it reconnects the subtrees into a tree T2 with weight less than that of T1, because the weight of *f* is less than the weight of *e*.

--------------------------------------

**שקף 60 שאלה 8**

הפתרון זהה בבסיסו לשאלות קודמות.

**שקף 60 שאלה 9**

אינטואיציה:

לדוגמא

מחפשים את ה-n המקסימלי שהוא, המעריך שמתקבל ממכפלת החזקות של 2 במונה כאשר המונה הוא מכפלת המשקלים של העץ הפורש המתאים.

בסוגריים רואים את הפירוק שמציג את החזקות של 2 ויזואלית!! אך כל מכפלה כזו היא המשקל של הקשת בגרף הנתון.

לו קיימת דרך יעילה למצוא את החזקה הגבוהה ביותר של 2 המרכיבה משקל מסויים(או ליתר דיוק פירוק של מספר לגורמיו הראשוניים) נוכל לשנות את קריטריון המיון לפי גודל החזקה בעבור כל משקל של קשת, ולמצוא עץ פורש מקסימלי לפי אותן חזקות מה שמבטיח שמכפלת המשקלים בקבוצת הקשתות של העץ הפורש המקסימלי תכיל חזקה גבוהה ביותר של 2 ולפיכך תתחלק במספר זה(חזקה של 2) שהוא יהיה שוב הכי גבוה מבין שאר העצים הפורשים

**שקף 60 שאלה 10**

אינטואיציה:

אם נריץ קרוסקל המיון ייתן בכל הרצה סדרה אחת ויחידה של משקלים בסדר עולה(עבור עץ פורש מינימלי) וזאת בגלל שכל המשקלים שונים זה מזה! הסדרה הנ"ל מגדירה את סדר הקשתות הנבחנות באלגוריתם להכנסתם לקבוצת קשתות העץ , גם אם נדלג על קשתות מסויימות בגלל שהן סוגרות מעגל תמיד נקבל אותה סדרה של קשתות עץ! (כי יש רק של קשת שסוגרת מעגל שמדלגים מעליה לא ייתכן המצב של שוויון משקלים בין קשתות ובחירה שרירותית דהיינו עץ שונה מאחר וכל המשקלים שונים!, נתון )

(עבור פרים זה פחות אינטואיטיבי מאחר והוא מצמיח את העץ מקודקוד מסויים)

ראינו משפט שעבור כל שתי עצים פורשים מינימליים(או מקס') הקשתות המרכיבות אותו יכולות להיות שונות אך סדרת המשקלים על קשתות אלו חייבת להיות זהה מאחר והמשקל הכולל זהה!!

נניח בשלילה שקיימים שני עצים פורשים מינימליים בעבור גרף נתון כך שמשקלה של כל קשת שונה זה מזה.

לפי המשפט קיימות הסדרות(בצורה ממויינת):

a1,a2,a3,…,am

b1,b2,b3,…,bm

כך שכל משקל מייצג קשת בעץ המתאים וערכיהם זהים בהתאמה!

אבל מאחר ולכל קשת משקל ייחודי משלה יוצא שכל זוג משקלים שווים חייב לייצג את אותה הקשת בעצם וזה סתירה להנחה שישנם שני עצים פורשים מינימליים לגרף ולכן, בעבור סט נתונים כזה יהיה עץ פורש מינימלי יחיד.